

Brevet de Technicien Supérieur Groupement A

MATHÉMATIQUES

SESSION 2013

SPÉCIALITÉS	COEFF	DURÉE
CONTRÔLE INDUSTRIEL ET RÉGULATION AUTOMATIQUE	2	3
INFORMATIQUE ET RÉSEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES	3	3
SYSTÈMES ÉLECTRONIQUES	2	3
ÉLECTROTECHNIQUE	2	3
GÉNIE OPTIQUE	3	3
TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE	3	3

Matériel autorisé :

Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique sont autorisées à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Circulaire 99-186 du 16 novembre 1999

Document à rendre et àagrafer avec la copie :

Document réponsepage 8/9

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

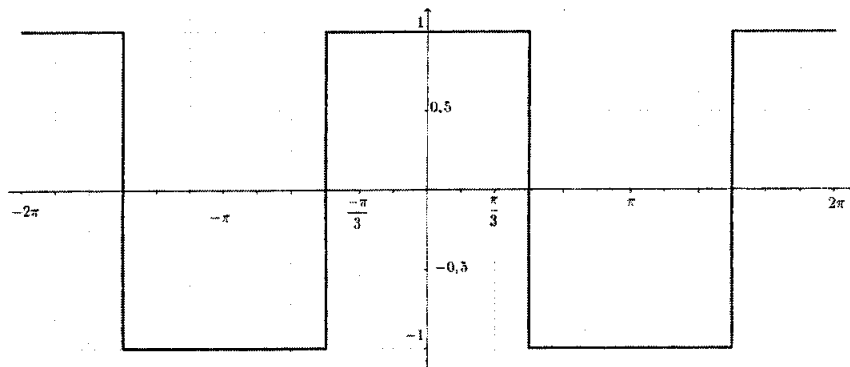
BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 1/9

EXERCICE 1 (10 points)

Cet exercice comporte 2 parties indépendantes. Il traite de l'équilibre de systèmes triphasés. Aucune connaissance sur ces systèmes n'est nécessaire pour traiter l'intégralité de cet exercice.

Partie A

Un onduleur à commande asynchrone délivre une tension périodique $f(t)$ de période 2π selon la représentation graphique suivante :



1. Sur l'annexe n° 1, on a représenté graphiquement sur $[-2\pi; 2\pi]$ la tension $f(t)$ et la tension $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$.
Sur le document réponse, compléter le tableau de valeurs et construire la représentation graphique de la tension $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$ sur $[-2\pi; 2\pi]$.
2. En régime triphasé, l'onduleur soumet la phase 1 à la tension $f(t)$, la phase 2 à la tension $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ et la phase 3 à $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$. Le neutre, quant à lui, est soumis à la somme $S(t)$ des tensions des phases, définie par

$$S(t) = f(t) + f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

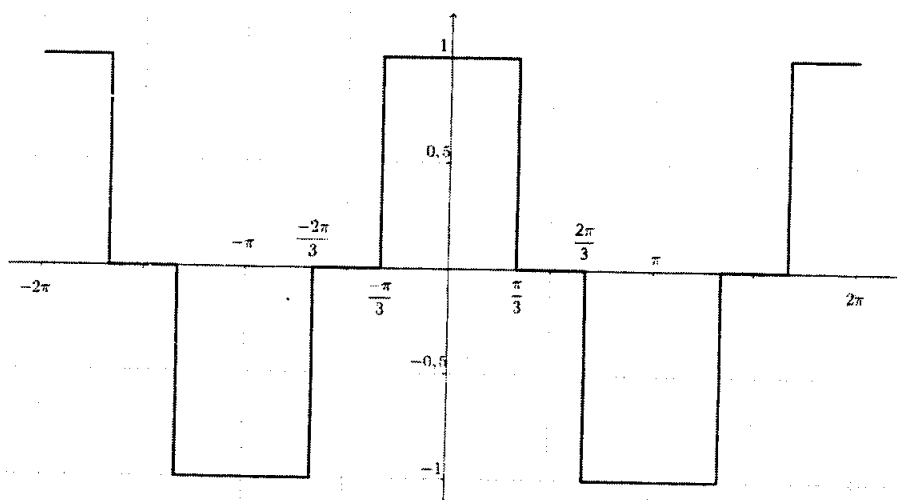
Si cette somme est nulle pour tout nombre réel t , le système triphasé est équilibré. Sinon, le système est déséquilibré.

- (a) Calculer $S(0)$.
- (b) Le système triphasé étudié dans cette partie est-il équilibré ?

Partie B

Pour garantir l'équilibrage d'un système triphasé, on peut utiliser un onduleur à commande décalée. Ainsi, nous considérons dans cette partie que la tension délivrée est un signal g de période 2π , dont la représentation graphique sur $[-2\pi; 2\pi]$ figure ci-après :

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 2/9



On s'intéresse au développement en série de Fourier du signal g .
 Dans la suite de l'exercice, a_0 , a_n et b_n désignent les coefficients du développement en série de Fourier de ce signal g , avec les notations du formulaire.

1. Déterminer a_0 .
2. Préciser la valeur des coefficients b_n pour tout entier naturel n non nul.
3. (a) Donner la valeur de $g(t)$ sur chacun des intervalles $]0; \frac{\pi}{3}[$, $[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[$ et $[\frac{2\pi}{3}; \pi[$.
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}.$$

4. (a) Vérifier que $a_{3k} = 0$, pour tout nombre entier naturel k non nul.
 (b) On démontre que ce qui empêche un signal d'être nul dans le neutre est la présence d'harmoniques non nulles de rangs multiples de 3 dans le développement en série de Fourier du signal g .
 Peut-on considérer que le système triphasé est équilibré, c'est à dire que la tension sur le neutre est nulle ?

Remarque : Dans les hôpitaux, les banques, les lycées, etc., l'énergie électrique est fournie par des transformateurs ou par les onduleurs qui alimentent une multitude de récepteurs (ordinateurs, lampes basse-consommation...) qui génèrent des courants harmoniques. Sans une installation adaptée et sans une utilisation de récepteurs optimisés, l'accumulation d'harmoniques de rangs multiples de 3 conduit au déséquilibre du système triphasé. Ceci peut engendrer de graves problèmes : surchauffe du fil portant le neutre, phénomènes d'interférence, augmentation des pertes d'énergie, ouverture des fusibles ou interrupteurs automatiques...

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 3/9

EXERCICE 2 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

On notera U la fonction échelon unité définie pour tout nombre réel t par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $] -\infty; 0[$. On considère un système entrée-sortie où les signaux d'entrée et sortie sont modélisés par des fonctions causales notées respectivement e et s . Ce système est du second ordre, c'est à dire que les fonctions e et s sont liées sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par une équation différentielle du type

$$s''(t) + b s'(t) + c s(t) = c e(t),$$

où b et c désignent des constantes réelles.

On suppose de plus dans tout l'exercice que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 0$.

Partie A : résolution d'une équation différentielle du second ordre

Dans cette partie, on suppose que $b = 1$ et $c = 0,25$. De plus, le signal d'entrée, constant, est défini pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $e(t) = 10$.

La fonction causale s est donc solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + y' + 0,25y = 2,5.$$

1. Déterminer une fonction constante sur $[0; +\infty[$ solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' + y' + 0,25y = 0$.
3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Parmi les quatre expressions ci-dessous, laquelle est celle de $s(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$?

Recopier la réponse choisie sur la copie.

- $5te^{-0,5t}$
- $10 - (5t + 10)e^{-0,5t}$
- $10 - (2,5t + 10)e^{-0,25t}$
- $10 - (10t + 10)e^{-0,5t}$

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 4/9

Partie B : utilisation de la transformation de Laplace

Dans cette partie, on suppose que $b = 0$ et $c = 9$. De plus, le signal d'entrée, sinusoïdal, est défini pour tout nombre réel t par

$$e(t) = \sin(2t)U(t).$$

La fonction causale s est donc solution de l'équation différentielle

$$(E') : s''(t) + 9s(t) = 9\sin(2t)U(t).$$

On note S la transformée de Laplace de la fonction s .

1. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (E') , montrer que

$$S(p) = \frac{18}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$$

2. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel p , on ait

$$S(p) = \frac{a}{p^2 + 4} + \frac{b}{p^2 + 9}.$$

3. En déduire l'expression de $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

Partie C : détermination de l'amplitude du signal de sortie

On note f la fonction causale définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(t) = (1,8 \sin(2t) - 1,2 \sin(3t)) U(t).$$

Cette fonction est périodique de période 2π sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Sur l'annexe 2 sont tracées deux représentations graphiques de la fonction f .

Les points M_1, M_2, M_3, M_4 indiqués sur le graphique correspondent aux extremums locaux de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur maximale A atteinte par $f(t)$ quand t varie dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. En utilisant la figure 1 de l'annexe 2, déterminer une valeur approchée de A à 0,1 près.
2. Pour tout nombre réel t positif ou nul, calculer une expression de $f'(t)$.

BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 5/9

3. (a) Montrer que, pour tout nombre réel positif ou nul t , $f'(t)$ peut se mettre sous la forme

$$f'(t) = \alpha \sin\left(\frac{5t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

où α est un nombre réel strictement positif.

En déduire la valeur de $f'\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ pour tout nombre entier naturel k .

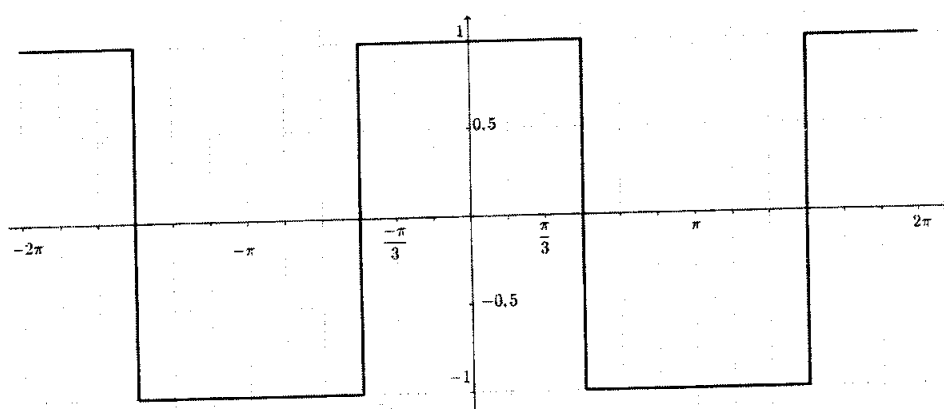
- (b) Déterminer les valeurs exactes des abscisses des points M_1, M_2, M_3, M_4 .

En déduire une valeur approchée de A à 10^{-3} près.

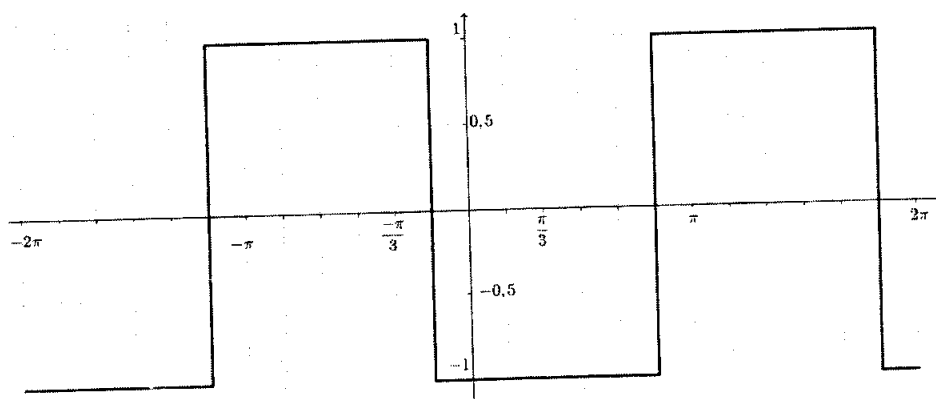
BTS		Session 2013
Mathématiques	code: MATGRA	Page : 6/9

Annexe 1

Représentation graphique de la tension $f(t)$



Représentation graphique de la tension $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$

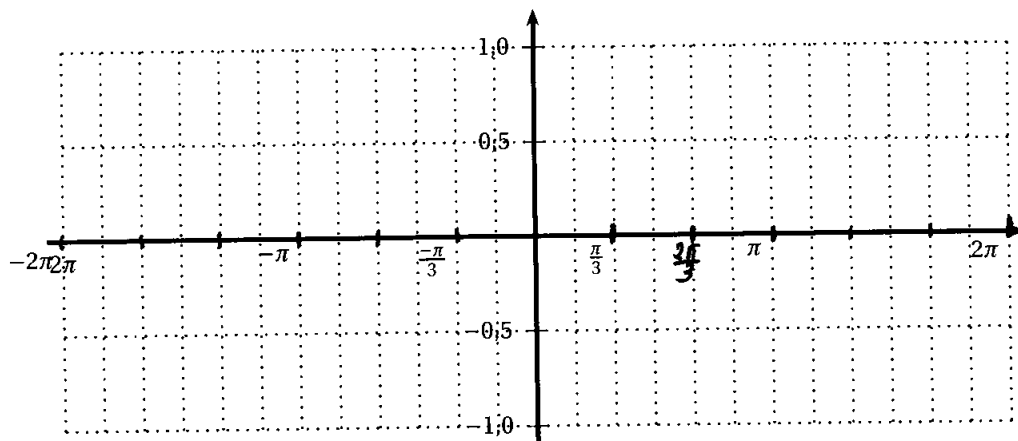


Document réponse
(à rendre avec la copie)

Tableau des valeurs prises par $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$ pour certaines valeurs de t

t	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$		1						-1

Repère pour représenter $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$



Annexe 2

Figure 1

