TS SI/SVT Devoir n°7 : Devoir maison pour le 3/11/2014

Dans une réserve africaine les observateurs en place ont constaté que la population d'animaux d'une espèce donnée est en baisse de 10% tous les ans depuis plusieurs années. Actuellement, en 2014, cette population a été évaluée à 500 animaux.

On fait l'hypothèse que cette tendance va se poursuivre dans les années à venir.

On s'intéresse à l'évolution de la population d'animaux à partir de 2014. La situation peut être modélisée par une suite (u_n), le terme u_n donnant une estimation du nombre d'animaux dans la réserve l'année $2014 + n$.

A- *Prévisions quant à l'évolution de cette population*

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : P et Q sont des nombres réels
N est un nombre entier
Entrée : Saisir une valeur pour Q
Traitement : Affecter à N la valeur 0
               Affecter à P la valeur 500
             Tant que P > Q faire
                affecter à P la valeur 0,9*P
                affecter à N la valeur N+1
             Fin du Tant que
Sortie : Afficher N
```

1. a) On saisit la valeur 300 pour Q. Pour cette valeur de Q, en suivant pas à pas l'algorithme précédent, recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de P	500			
Valeur de N	0			
Tant que P > Q	vrai			

2. Pour la valeur 300 saisie, comment interpréter le résultat de cet algorithme ?

Pour tout entier naturel n, on note u_n la population de ces animaux en $2014 + n$. On a $u_0 = 500$.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Quelle est la limite de (u_n) ?

c) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 1$ et interpréter ce résultat.

B – *Prévisions avec une introduction d'animaux dans cette réserve*

Afin de compenser cette baisse de population, on décide d'introduire dans cette réserve, tous les ans dès 2015, 80 animaux prélevés dans une autre réserve.

1. Donner dans un tableau, l'évolution de cette population de 2014 à 2020.

2. On se place dans l'hypothèse d'une disparition la population de 10% de la population tous les ans et d'une introduction de 80 animaux nouveaux. Pour tout entier naturel n, on note v_n la population de ces animaux en $2014 + n$. On a $v_0 = 500$.

Donner l'expression de v_{n+1}en fonction de v_n.

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 800$;

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,9. Préciser w_0.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 800 - 300 \times 0{,}9^n$.

c) À partir de combien d'années, la population d'animaux sera-t-elle stabilisée ?

Correction du devoir

A - Prévision quant à l'évolution de cette population

1a)

Valeur de P	500	450	405	364,5	328,05	295,245
Valeur de N	0	1	2	3	4	5
Tant que P>Q	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

$Q=300$

2pts

1b. Pour la valeur 300 saisie, l'algorithme donne le nombre d'années au bout desquelles la population d'animaux de l'espèce étudiée est en-dessous de 300 (ici on trouve 5 ans)

2pts

2) a) $u_0 = 500$
et $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n$ car chaque année la population diminue de 10% (diminuer de 10% correspond à multiplier par 0,9)

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et donc nous avons :

$$\boxed{u_n = (0{,}9)^n u_0 = (0{,}9)^n \times 500}$$

2pts

2) b) Comme $u_n = 0{,}9^n \times 500$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}9^n) = 0$ car $-1<0{,}9<1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$

1pt

2) c) J'utilise l'algorithme précédent en entrant la valeur Q=1
L'algorithme donne 59 : Au bout de 59 années, il y aura disparition de l'espèce.

3pts

B - Prévisions avec une introduction d'animaux de cette réserve.

1°)

année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
	500	530	557	581	603	622	640

2pts

2°) $v_0 = 500$

$$v_{n+1} = \underbrace{0{,}9\, v_n}_{\text{diminution de } 10\%} + \underset{\text{ajout de 80 animaux.}}{80}$$

2pts

3°) $W_n = v_n - 800$

a) $W_{n+1} = v_{n+1} - 800$

$= 0{,}9 v_n + 80 - 800$

$= 0{,}9\,(W_n + 800) + 80 - 800$ (car $v_n = W_n + 800$)

$W_{n+1} = 0{,}9 W_n + 720 - 720$

donc $\boxed{W_{n+1} = 0{,}9\, W_n}$ la suite est géométrique de raison 0,9.

avec $W_0 = v_0 - 800 = -300$

2pts

b) Comme (W_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$ avec $W_0 = -300$

on aura : $W_n = W_0 \cdot q^n = -300 \cdot (0{,}9)^n$

Or $v_n = W_n + 800$ donc $v_n = -300 \cdot (0{,}9)^n + 800$

c.à.d : $\boxed{v_n = 800 - 300 \cdot (0{,}9)^n}$ 2pts

c) La population sera stabilisée lorsque :

$$300.(0,9)^n < 1$$

ce qui correspond à $n = 55$. ans.

$$\left(\begin{array}{l} 300.(0,9)^{54} \simeq 1,01 \\ 300.(0,9)^{55} \simeq 0,91 \end{array} \right)$$

2pts