Classe: TSSI/SVT	Date: 13/10/2014	Type
Devoir n°6		**Devoir surveillé**
Thème: Suites		

Exercice 1 : Démonstration par récurrence (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2(u_n+2^n)$.

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n2^n$.

Exercice 2 : QCM (5 points)

Indiquez, pour chacune des affirmations, si elles sont vraies ou fausses (On pourra entourer ou barrer. Comptez 0,5 point par bonne réponse, retirez 0,25 point par mauvaise réponse. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si une suite (u_n) est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.	~~VRAI~~	FAUX
Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.	~~VRAI~~	FAUX
La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2+3$ est une suite géométrique.	~~VRAI~~	FAUX
La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2n+3$ est une suite arithmétique.	VRAI	~~FAUX~~
Si pour tout $n\geqslant100$, $u_n\leqslant5$, alors la suite u_n est majorée.	VRAI	~~FAUX~~
Une suite bornée est convergente	~~VRAI~~	FAUX

Dans le tableau suivant, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{-2}{u_n}$.

Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.	~~VRAI~~	FAUX
Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.	VRAI	~~FAUX~~
Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.	~~VRAI~~	FAUX
Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.	~~VRAI~~	FAUX

Exercice 3 : Expression d'une suite (10 points)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0=-1$, $u_1=\frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$.

1°) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2°) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n .$$

a) Calculer v_0 .

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Exprimer v_n en fonction de n.

3°) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n=\frac{u_n}{v_n} .$$

a) Calculer w_0 .

b) En utilisant les égalités $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$ et $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$, montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

c) Exprimer w_n en fonction de n.

4°) Montrer alors que : $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.

Exercice 1

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2(u_n + 2^n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1°) $u_1 = 2(u_0 + 2^0) = 2 \times 1 = 2$

1 $\quad u_2 = 2(u_1 + 2^1) = 2 \times (2+2) = 2 \times 4 = 8$

2°) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n 2^n$

* Pour $n = 0$: $u_0 = 0 = 0 \times 2^0$: La formule est vraie pour $n = 0$
1 Pour $n = 1$: $u_1 = 2 = 1 \times 2^1$: La formule est vraie pour $n = 1$
On peut aussi vérifier que la formule est vraie pour $n = 2$

* hypothèse de récurrence : je suppose que pour p fixé : $u_p = p 2^p$

Dans ce cas : $u_{p+1} = 2(u_p + 2^p)$ (par définition de la suite)

$= 2(p 2^p + 2^p)$ (en utilisant l'hyp. de récurrence

$= 2.2^p(p+1)$

$= 2^{p+1}(p+1)$

$= (p+1) 2^{p+1}$ $\Leftarrow$ ceci est la formule au rang $p+1$

3 conclusion : La propriété : "$u_n = n2^n$" est héréditaire.

* conclusion finale : La propriété : "$u_n = n2^n$" est initialisé pour $n = 0$, elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

donc $\boxed{u_n = n 2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3

$u_0 = -1 \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad$ et $\quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$

1°) $u_2 = u_1 - \frac{1}{4} u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

La suite n'est pas arithmétique : Si elle l'était : $u_1 - u_0 = r = u_2 - u_1$

or $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$: La suite n'est pas arithmétique

La suite n'est pas géométrique : Si elle l'était : $u_1 = q u_0$ et $u_2 = q u_1$ Donc $\frac{u_1}{u_0} = q = \frac{u_2}{u_1}$

or $\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$

Donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$: La suite n'est pas géométrique

2°) $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \boxed{v_0 = 1}$

b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2} u_{n+1}$ (par déf. de (v_n))

$= u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1}$ (car $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$)

$= \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$ (on a mis $\frac{1}{2}$ en facteur)

donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n}$ (car $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$)

c) Comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) D'après c), on sait que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times v_0$

c.à.d : $v_n = \frac{1}{2^n} \times 1$ $\boxed{v_n = \frac{1}{2^n}}$

3°) $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

b) Nous avons :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$$

$$w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$$

donc $\boxed{w_{n+1} = 2 + w_n}$

La suite (w_n) est donc arithmétique de raison 2.

c) On en déduit que $w_n = w_0 + 2n$

Donc $w_n = -1 + 2n$ pour tout n

4°) Nous savons que $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

Donc $u_n = w_n \cdot v_n$

$\underline{\text{or}}$ $w_n = 2n - 1$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$

D'où $u_n = (2n-1) \times \frac{1}{2^n}$

c.à.d: $\boxed{u_n = \frac{2n-1}{2^n}}$