

Devoir n°2 (Pour le 19/9/2014)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty ; 6[$  par :

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit, pour tout entier naturel  $n$ , la suite  $(u_n)$  par :

$$\begin{cases} u_0 &= -3 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. La courbe représentative de la fonction  $f$  est donnée annexe et est accompagnée de celle de la droite d'équation  $y = x$ . Construire, sur ce document, les points  $M_0(u_0 ; 0)$ ,  $M_1(u_1 ; 0)$ ,  $M_2(u_2 ; 0)$ ,  $M_3(u_3 ; 0)$  et  $M_4(u_4 ; 0)$ .  
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite  $(u_n)$  ?
2.   a. Démontrer que si  $x < 3$ , alors  $\frac{9}{6-x} < 3$ .  
      En déduire que  $u_n < 3$  pour tout entier naturel  $n$ .  
      b. Étudier le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .  
      c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
      a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-\frac{1}{3}$ .  
      b. Déterminer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
      c. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

Annexe

