TS-04/05/2014

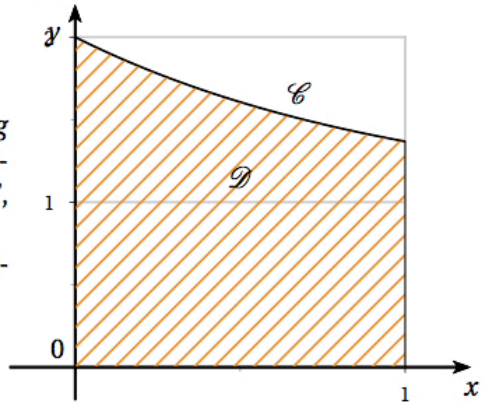
Devoir n°20

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = 1 + e^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $g(x) > 0$.

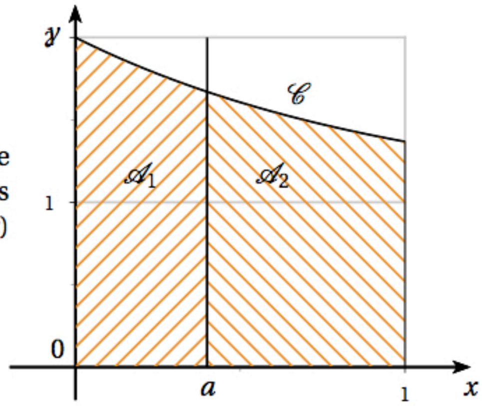
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. **a.** Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.

   b. Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}.$$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0 ; 1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Correction du devoir

Partie A

1\. a) $\mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x)dx = \int_0^a (1+e^{-x})\,dx = \left[x - e^{-x}\right]_0^a$

$\mathcal{A}_1 = (a - e^{-a}) - (0 - e^0) = \boxed{a - e^{-a} + 1}$ (3 pts)

b) $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x)dx = \int_a^1 (1+e^{-x})dx = \left[x - e^{-x}\right]_a^1$

$\mathcal{A}_2 = (1 - e^{-1}) - (a - e^{-a}) = \boxed{1 - e^{-1} - a + e^{-a}}$ (3 pts)

2\. a) $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$ pour $x \in [0;1]$

f est dérivable sur $[0;1]$ comme somme de fonctions dérivables.

$f'(x) = 2 + 2e^{-x} + 0 = 2(1+e^{-x})$ (1 pt)

Les variations de f sont données par le signe de la dérivée. Or $f'(x) = 2(1+e^{-x}) > 0$ (car $e^{-x} > 0$)

D'où le tableau des variations :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-2+\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$2-\frac{1}{e}$

(1 pt)

$f(0) = -2 + \frac{1}{e} \simeq -1{,}63 < 0$

$f(1) = 2 - 2e^{-1} + \frac{1}{e} = 2 - 2\times\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = 2 - \frac{1}{e} \simeq 1{,}63 > 0$

(1 pt)

2b. La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ donc continue sur $[0;1]$, elle est strictement croissante et $f(0)<0$ et $f(1)>0$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α unique de $[0;1]$ tel que $f(\alpha)=0$ (3 pts)

1 En utilisant une calculatrice on trouve :
$\alpha \simeq 0{,}45$ arrondie au centième.

3. D'après 1° : $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$

$$\Leftrightarrow a - e^{-a} + \cancel{1} = \cancel{1} - e^{-1} - a + e^{-a}$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2e^{-a} + \frac{1}{e} = 0$$

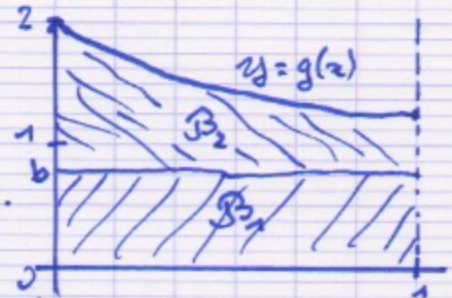
$$\Leftrightarrow f(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \alpha \quad (\text{voir } 2°)$$

Donc $\boxed{a \simeq 0{,}45}$ (2pts)

Partie B

1°) Comme $g(0)=2$ et g est décroissante, alors l'aire totale sous la courbe entre $x=0$ et $x=1$ est inférieure à 2.
Donc nécessairement $b \leq 1$
(car on veut diviser l'aire par 2)
Or $1 < 1 + \frac{1}{e}$ donc $\boxed{b \leq 1 < 1 + \frac{1}{e}}$ (3pts)



2°) On veut que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \frac{1}{2}\mathcal{B}$ (où $\mathcal{B}$ est l'aire totale sous la courbe)

$$\mathcal{B} = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (1 + e^{-x})dx = \left[x - e^{-x}\right]_0^1 = (1 - e^{-1}) - (0 - 1)$$

$\underline{\mathcal{B} = 2 - e^{-1}}$. Or $\mathcal{B}_1 = b \times (1 - 0) = b$

Donc $\boxed{b = \mathcal{B}_1 = \frac{1}{2}\mathcal{B} = 1 - \frac{1}{2}e^{-1}}$ (3pts)