Classe: TS SI/SVT	Date: 6/2/2015	**Type**
Devoir n°15		**Devoir surveillé**
Thème: variations, équations paramétriques, loi binomiale		

Exercice 1

P est la fonction définie sur [-2;4] par:

$$P(x)=x^3-2x^2-2x-1 .$$

1°) Justifier la continuité de P sur [-2;4].
2°) Étudier les variations de P sur [-2;4] et dresser son tableau des variations.
4°) Démontrer que l'équation P(x)=0 admet une unique solution α.
5°) Déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Exercice 2

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0;4;1), B(1;3;0), C(2;-1;-2) et D(7;-1;4).
1°) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2°) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;-1\,;3)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
3°) Le point B est-il sur Δ ?
4°) On donne H(3;1;-2). Montrer que $H\in\Delta$.

Exercice 3

Un test se compose de dix questions ; pour chacune d'elles, trois réponses sont proposées, et une seule des trois est exacte.
Un candidat répond au hasard à chacune des dix questions, ses réponses étant indépendantes les unes des autres.
On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de réponses exactes du candidat après le test.
1°) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2°) Quelle est la probabilité pour que le candidat donne les réponses exactes à :
a) exactement trois questions ?
b) toutes les questions ?
c) au plus huit questions ?

Correction du devoir

Exercice 1 (8pts)

1°) La fonction P est une fonction polynôme, elle est donc continue sur $[-2;4]$. (1)

2°) Les variations de P sont données par le signe de la dérivée.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$$

donc $\boxed{P'(x) = 3x^2 - 4x - 2}$ (1)

Comme $P'(x)$ est un polynôme de degré 2, il est du signe de $a=3$ sauf entre les racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times3\times(-2) = 16 + 24 = 40 = 4\times10$$

Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-\sqrt{4\times10}}{6} = \dfrac{4-2\sqrt{10}}{6} = \dfrac{2-\sqrt{10}}{3} \simeq -0{,}39 \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{10}}{3} \simeq 1{,}72 \end{cases}$$

(1,5)

On remarque que x_1 et x_2 sont tous les deux dans $[-2;4]$.
D'où le tableau des variations :

x	-2		x_1		x_2		4
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	-13	$\nearrow$	$P(x_1)$	$\searrow$	$P(x_2)$	$\nearrow$	23

(1,5)

$P(-2) = -13$ $\qquad P(x_1) \simeq -0{,}58$

$P(4) = 23$ $\qquad P(x_2) \simeq -5{,}268$

4°) D'après l'étude précédente :

* Sur l'intervalle $[-2;x_2]$: la fonction admet un maximum qui est $P(x_1) < 0$. Sur cet intervalle, l'équation $P(x)=0$ n'a donc pas de solution. (0,5)
* Sur l'intervalle $[x_2;4]$: la fonction P est strictement croissante, continue avec $P(x_2)<0$ et $P(4)>0$, l'équation

$P(x)=0$ admet donc une unique solution sur $[x_2, 4]$. (1,5)

5°) En utilisant la fonction de la calculatrice, je cherche cette solution sur $[-2;4]$. J'obtiens :

$$\boxed{\alpha \simeq 2,83 \text{ à } 10^{-1} \text{ près}}$$ (1)

<u>Exercice 2 :</u> $A\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}$

(6pts)

1°) <u>On a :</u> $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont donc pas colinéaires, ce qui montre que les points A, B et C ne sont pas alignés. (1,5)

2°) <u>Représentation paramétrique de Δ.</u>

$$M(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \vec{DM} = k\vec{u} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-7\\y+1\\z-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2k\\-k\\3k\end{pmatrix} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 7+2k \\ y = -1-k \\ z = 4+3k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}}$$

Ceci est une représentation paramétrique de Δ.

(2,5)

3°) $$B \in \Delta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} 1 = 7+2k \\ 3 = -1-k \\ 0 = 4+3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} k = -3 \\ k = -4 \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Le système est incompatible, <u>k n'existe pas !</u>

Donc le point $\boxed{B \notin \Delta}$.

(1)

4°) $H \in \Delta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} 3 = 7 + 2k \\ 1 = -1 - k \\ -2 = 4 + 3k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow k = -2$

Le point H est donc le point de paramètre $k = -2$ de Δ.

Donc $\boxed{H \in \Delta}$ (1)

Exercice 3 : 1°) On est en présence d'un schéma de Bernoulli car on répète 10 fois la même experience aléatoire (répondre à chacune de question) de manière indépendante ("Les réponses sont indépendantes les unes des autres") à deux issues : ~~vrai~~ JUSTE ou FAUX. La probabilité qu'une réponse soit "JUSTE" est $\frac{1}{3}$ (car le candidat répond au hasard).

(6pts)

explication : (1,5)
- répétition 0,5
- m̂ exp : 0,5
- X indique : 0,5

paramètres : (1,5)

Comme X est la v.a. qui indique le nombre de réponses "JUSTE", on sait que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$

(3)

2°) a) On cherche $P(X=3)$

$P(X=3) = \binom{10}{3} p^3 q^7 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{120 \times 2^7}{3^{10}} \simeq 0,260$ (1)

(on peut aussi utiliser la calculatrice : binompdf$(10, \frac{1}{3}, 3) \simeq 0,260$)

b) On cherche $P(X=10) = \binom{10}{10} p^{10} q^0 = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \times 1 \simeq 0,0000169$ (1)

(avec calculatrice : binompdf$(10, \frac{1}{3}, 10) \simeq 0,0000169$)

c) On cherche $P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8) = 1 - \left(P(X=9) + P(X=10)\right)$

Il est plus rapide d'utiliser la calculatrice : $P(X \leq 8) \simeq 0,9996$

(calculatrice : binomialcdf$(10 ; \frac{1}{3} ; 8)$ (1)