

Classe: TS SI/SVT	Date: 16/01/15	<u>Type</u> <u>Devoir Maison</u> <u>pour le 26/01/15</u>
<u>Devoir n°14</u>		
Thème: limites et continuité et théorème des v.i.		

Exercice 1

Soit f la fonction : $x \mapsto x + \sin(x)$.

1°) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Dresser le tableau des variations de f sur $[0; \pi]$.

3°) Démontrer qu'il existe un réel α_0 et un seul de $[0; \pi]$ tel que $f(\alpha_0) = \frac{\pi}{2}$.

4°) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α_0 à 10^{-2} près.

Exercice 2

On considère l'équation (E): $x^3 + 3x - 2 = 0$.

1°) Justifier que (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2°) Vérifier que α est strictement compris entre 0 et 1, puis donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} .

Exercice 3

P est la fonction définie par:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1°) Justifier la continuité de P sur $\mathbb{R}$.

2°) Étudier les limites de P en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) Étudier les variations de P et dresser son tableau des variations.

4°) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α .

5°) Par balayage, déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Corrigé du devoir

Exercice 1 : 1°) La fonction $f(x) = x + \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 Comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
 Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
 (7 points)

2°) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.
 $f'(x) = 1 + \cos(x)$
 Comme $\cos(x) > -1$, donc $\cos(x) + 1 > 0$ donc $f'(x) > 0$.
 De plus, sur $[0; \pi]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi$

D'où le tableau:

x	0	π
$f'(x)$		0
$f(x)$	0	π

3°) f étant continue, strictement croissante sur $[0; \pi]$ et
 $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$.
 Comme $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$, d'après le théorème des valeurs
 intermédiaires, il existe un unique réel α_0 tel que :
 $f(\alpha_0) = \frac{\pi}{2}$.

4°) A l'aide de la calculatrice:

$$\begin{cases} f(0,8) \approx 1,51 \\ f(0,9) \approx 1,68 \end{cases}$$

$$\text{donc } 0,8 < \alpha_0 < 0,9$$

$$\begin{cases} f(0,83) \approx 1,56 \\ f(0,84) \approx 1,58 \end{cases}$$

$$\text{donc } 0,83 < \alpha_0 < 0,84$$

conclusion:

$$\alpha_0 \approx 0,83 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}$$

$$(\alpha_0 \approx 0,831711)$$

Exercice 2:
(5 points)Posons $g(x) = x^3 + 3x - 2$

(Attention, (E) est une équation, pas une fonction!)

L'équation (E) s'écrit alors:

$$g(x) = 0$$

1°) g est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue (car c'est un polynôme) sur $\mathbb{R}$. De plus:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

$$2^\circ) \left\{ \begin{array}{l} g(0) = -2 < 0 \\ g(1) = 2 > 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \boxed{0 < \alpha < 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0,5) < 0 \\ g(0,6) > 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad 0,5 < \alpha < 0,6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0,59) < 0 \\ g(0,60) > 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad 0,59 < \alpha < 0,60$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0,596) < 0 \\ g(0,597) > 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \boxed{0,596 < \alpha < 0,597}$$

Exercice 3: 1°) P est un polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$
(8 points)

2°) $P(x) = x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$

or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = 2 - 0 - 0 = 2$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \times 2 = -\infty$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \times 2 = +\infty$

3°) Les variations de P sont données par le signe de $P'(x)$.
 $P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ (je factorise)
 $P'(x)$ est un polynôme de degré 2, il est donc du signe de $a=6$ sauf entre les racines $x=0$ ou $x=1$ (voir factorisation de $P'(x)$)
D'où le tableau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	-	0	+	
$P(x)$	$-\infty$			-1		-2	$+\infty$

$P(0) = -1$
 $P(1) = -2$

4°) * Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, P admet un maximum qui est -1, donc sur cet intervalle, l'équation $P(x)=0$ n'a pas de solution.

* Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, P est continue, strictement croissante, avec $P(1) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

conclusion finale: l'équation $P(x)=0$ a une unique solution α sur $\mathbb{R}$

5°) * $P(1) = -2$ et $P(2) = 3$ donc $1 \leq \alpha \leq 2$

* $P(1,6) \approx -0,48$ et $P(1,7) \approx 0,156$ donc $1,6 < \alpha < 1,7$

* $P(1,67) \approx -0,05$ et $P(1,68) \approx 0,01$ donc $1,67 < \alpha < 1,68$

Donc $\alpha \approx 1,67$ à 10^{-2} près par défaut