Devoir n°13 pour le 12/01/15

Exercice 1

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1%. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.
On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $P(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

Exercice 2

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25% de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les évènements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

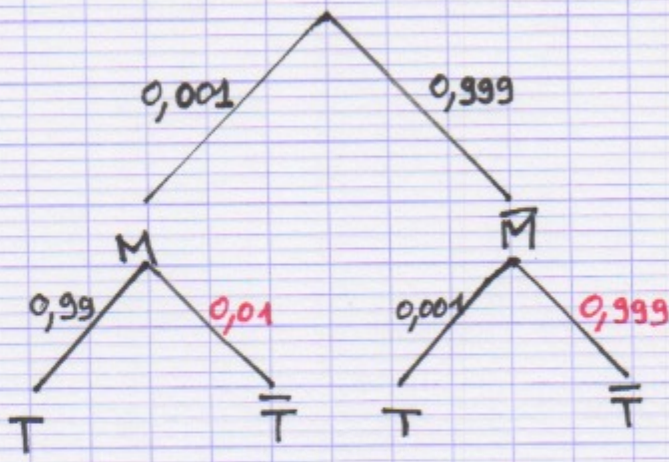
Corrigé du devoir : **Exercice 1**

1a) $M =$ "la personne choisie est malade" $\quad P(M) = 0{,}001$ d'après l'énoncé

$T =$ " le test est positif "

Nous avons aussi, d'après l'énoncé : $P_M(T) = 0{,}99$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}001$

Faisons un arbre de probabilité



2

1b) D'après l'arbre : $P(T) = 0{,}99 \times 0{,}001 + 0{,}999 \times 0{,}001 = 0{,}001989$

$$\boxed{P(T) = 1{,}989 \times 10^{-3}}$$

2

1c) Affirmation : " Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade "

Cette affirmation se traduit par : $P_T(M) < \frac{1}{2}$.

Calculons $P_T(M)$: $\quad P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{0{,}001 \times 0{,}99}{0{,}001989}$

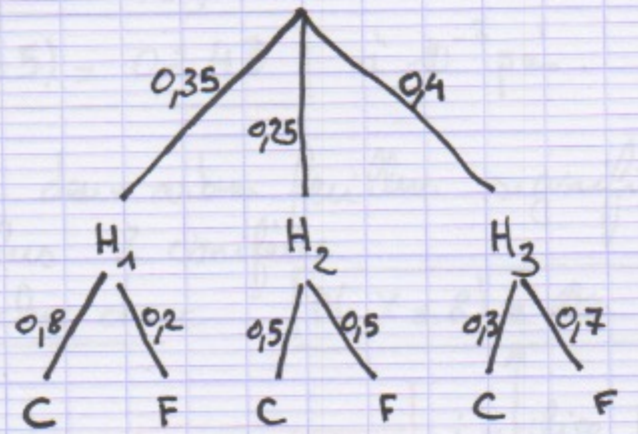
Donc $P_T(M) = 0{,}4977$

2

L'affirmation est donc vraie.

Correction du devoir : Exercice 2

1) a) En utilisant les données de l'énoncé, je dresse l'arbre des probabilités suivant :



2

1)b) On cherche : $P(C \cap H_3) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$ d'après l'arbre.

2

1)c) On utilise l'arbre (formule des probabilités totales)

$$P(C) = 0,8 \times 0,35 + 0,5 \times 0,25 + 0,3 \times 0,4 = 0,525$$

2

1)d) Dans cette question on sait que C est réalisé.

On cherche donc : $P_C(H_1) = \dfrac{P(C \cap H_1)}{P(C)} = \dfrac{0,8 \times 0,35}{0,525}$

$\boxed{P_C(H_1) \simeq 0,533}$ arrondi à 10^{-3} près

2

---

2) a) Comme X indique le nombre de conifères parmi 10 arbres. Comme le choix de chaque arbre est supposé fait de manière identique et indépendant et que la probabilité qu'un arbre soit un conifère est : $p = 0,525$, on sait que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 10 ; p = 0,525)$

2

2] b) On cherche $P(X=5)$.

Or $P(X=5) = \binom{10}{5} p^5 q^5 = 252 \times 0{,}525^5 \times (1-0{,}525)^5$

$\boxed{P(X=5) = 0{,}243}$ à 10^{-3} près.

2

2] c) Au moins deux arbres feuillus signifie qu'il y a au plus 8 conifères.

<u>On cherche donc</u> $\boxed{P(X \leq 8) = 0{,}984}$

2

j'utilise la fonction de la calculatrice.

(binomcdf(10 ; 0,525 ; 8))

autre méthode

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8)$$

$$= 1 - \left(P(X=9) + P(X=10) \right)$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{9} p^9 q + \binom{10}{10} p^{10} \right)$$

$$= 1 - \left(10 p^9 q + p^{10} \right)$$

avec $p = 0{,}525$
$q = 0{,}475$

$$= 1 - (0{,}01598\ldots)$$

$$= 0{,}984 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$