1S **Modèles de rédaction** **Enoncés**
Produit scalaire **& Corrigés**

Exercice 1 : définition du produit scalaire

Soit ABC un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 4$. Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Solution

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(9-4-16) = -\frac{11}{2}$$

Exercice 2 : produit scalaire et coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer $\vec{u}.\vec{v}$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0,5 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ m-5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2-m \\ m+4 \end{pmatrix}$ avec $m \in \mathbb{R}$

Solution

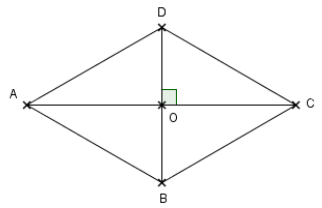
a) $\vec{u}.\vec{v} = 3\times 5 + (-2)\times 7 = 1$

b) $\vec{u}.\vec{v} = 0.5 \times \left(-\sqrt{6}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = 0$

c) $\vec{u}.\vec{v} = (m+1)(2-m) + (m-5)(m+4) = -18$

Exercice 3 : produit scalaire et cosinus

ABD et BCD sont deux triangles équilatéraux avec $AB = 4$.
Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD}$.



Solution

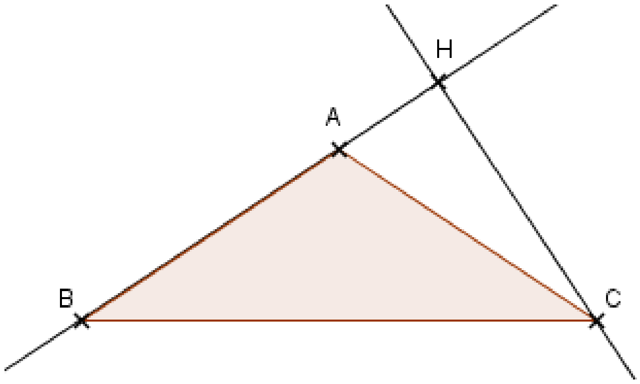
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = 4\times 4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8$$
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 4\times 4\times\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -8$$
$$\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}\right) + \pi\ (2\pi) = \frac{\pi}{3} + \pi\ (2\pi) = \frac{4\pi}{3}\ (2\pi)$$
$$\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{CD} = DO \times CD \times \cos\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{CD}\right) = 2\times 4\times\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4$$

Exercice 4 : produit scalaire et projeté orthogonal

ABC est un triangle isocèle en A tel que $BC = 5$ et $AB = 3$

1) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

2) Calculer BH où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).



Solution

1) Soit I le milieu du segment $[BC]$ alors (AI) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.
Comme ABC est un triangle isocèle alors (AI) est également la hauteur issue de A dans le triangle ABC donc (AI) est perpendiculaire à (BC) et $I \in (BC)$ donc I est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
Ainsi $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} = BC \times BI$ car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens
Donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 5 \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{2}$

2) Comme H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA} = BH \times BA$.
Donc $BH = \dfrac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}}{BA} = \dfrac{25}{6}$

Exercice 5 : Règles de calculs du produit scalaire

On donne un triangle ABC tel que $AB = 5$, $BC = 6$ et $CA = 7$.
Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AI}$
Déterminer $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}$

Solution

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\right).\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right).\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC}\right.$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\right) + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) + \frac{1}{6}BC^2$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) + \frac{1}{6}BC^2$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(7^2 - 5^2 - 6^2) + \frac{1}{6} \times 6^2$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC} = 3$

Exercice 6 : vecteurs orthogonaux

Dans chacun des cas suivants, déterminer la ou les valeurs de x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ x+1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$

Solution

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow 1 \times 6 + 3 \times (x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (2x-1)(3x+2)+2(x+1)=0 \Leftrightarrow 6x^2+3x=0 \Leftrightarrow 3x(2x+1)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=0$

Exercice 7 : théorème de la médiane

On considère un triangle ABC tel que $AB=7$, $AC=5$ et $BC=8$.
On note I est le milieu de $[BC]$
Calculer la longueur AI.

Solution

$$\begin{aligned} AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2 &\Leftrightarrow 7^2+5^2=2AI^2+\frac{1}{2}8^2 \\ &\Leftrightarrow 74=2AI^2+32 \\ &\Leftrightarrow 21=AI^2 \\ &\Leftrightarrow AI=\sqrt{21} \text{ (car } AI>0) \end{aligned}$$

Exercice 8 : formules d'addition

Transformer en produit :
1) $A=\sin(a+b)+\sin(a-b)$
2) $B=\cos(a+b)+\cos(a-b)$
3) $C=\sin(a+b)-\sin(a-b)$
4) $D=\cos(a+b)-\cos(a-b)$

Solution

1) $A=\sin(a+b)+\sin(a-b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a+\sin a\cos b-\sin b\cos a=2\sin a\cos b$
2) $B=\cos(a+b)+\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b+\cos a\cos b+\sin a\sin b=2\cos a\cos b$
3) $C=\sin(a+b)-\sin(a-b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a-\sin a\cos b+\sin b\cos a=2\sin b\cos a$
4) $D=\cos(a+b)-\cos(a-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b-\cos a\cos b-\sin a\sin b=-2\sin a\sin b$

Exercice 9 : formules de duplication

1) Exprimer $\sin^2(2x)$ et $\cos^2(2x)$ en fonction de $\cos(4x)$
2) Démontrer que $\cos^4(x)+\sin^4(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(4x)$
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^4(x)+\sin^4(x)=\frac{7}{8}$

Solution

1) $\sin^2(2x)=\dfrac{1-\cos(4x)}{2}$ $\qquad\cos^2(2x)=\dfrac{1+\cos(4x)}{2}$

2)

$$\begin{aligned} \cos^4(x)+\sin^4(x) &= (\cos^2(x))^2+(\sin^2(x))^2 \\ &= \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1+\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}+\frac{1-\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2(2x) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(4x) \end{aligned}$$

3)

$\cos^4(x)+\sin^4(x)=\frac{7}{8}$
$\Leftrightarrow \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(4x)=\frac{7}{8}$
$\Leftrightarrow \cos(4x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $4x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$

$S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\ ;\ -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})\right\}$

Exercice 10∇ : lieux de points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$.
I est le milieu du segment $[AB]$

Cas n°1 : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$
2) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 18$
3) Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -12$

Cas n°2 : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer l'ensemble F_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
2) Déterminer l'ensemble F_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7$
3) Déterminer l'ensemble F_3 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9$
4) Déterminer l'ensemble F_4 des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -10$

Cas n°3 : $MA^2 + MB^2 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer l'ensemble G_1 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 68$
2) Déterminer l'ensemble G_2 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 18$
3) Déterminer l'ensemble G_3 des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 4$

Cas n°4 : $MA^2 - MB^2 = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer l'ensemble H_1 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 0$
2) Déterminer l'ensemble H_2 des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 36$

Solution

Cas n°1 : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$ **avec** $k \in \mathbb{R}$.

1)

$M \in E_1 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

E_1 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par A

2) On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$M \in E_2 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 18$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = 18$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens et $AH \times AB = 18$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens et $AH = 3$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow H = I$

E_2 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par I.

3) On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$M \in E_3 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -12$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = -12$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraire et $AH \times AB = -12$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraire et $AH = -2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

E_3 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point K défini par $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Cas n°2 : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ **avec** $k \in \mathbb{R}$.

1)

$M \in F_1 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

F_1 est le cercle de diamètre $[AB]$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

Comme I est le milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA}.\left(-\overrightarrow{IA}\right) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - 9$.

2)

$M \in F_2 \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 7$

$\Leftrightarrow MI^2 - 9 = 7$

$\Leftrightarrow MI^2 = 16$

$\Leftrightarrow MI = 4$ car $MI \geq 0$

F_2 est le cercle de centre I et de rayon 4.

3)

$$\begin{aligned} M \in F_3 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9 \\ &\Leftrightarrow MI^2 - 9 = -9 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI = 0 \end{aligned}$$

F_3 est le point I.

4)

$$\begin{aligned} M \in F_4 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -10 \\ &\Leftrightarrow MI^2 - 9 = -10 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = -1 \end{aligned}$$

F_4 est vide

Cas n°3 : $MA^2 + MB^2 = k$ **avec** $k \in \mathbb{R}$.

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^{\,2} + \overrightarrow{MB}^{\,2} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)$

Comme I est le milieu du segment $[AB]$ alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ et $IB^2 = IA^2 = 9$

Donc $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 18$.

On peut également utiliser la formule de la médiane. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

1)

$$\begin{aligned} M \in G_1 &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 68 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = 68 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow MI = 5 \text{ car } MI \geq 0 \end{aligned}$$

G_1 est le cercle de centre I et de rayon 5.

2)

$$\begin{aligned} M \in G_2 &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = 18 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MI = 0 \end{aligned}$$

G_2 est le point I

3)

$$\begin{aligned} M \in G_3 &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = 4 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = -14 \end{aligned}$$

G_3 est vide

Cas n°4 : $MA^2 - MB^2 = k$ **avec** $k \in \mathbb{R}$.

D'après la formule de la médiane, $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

1)

$$\begin{aligned} M \in H_1 &\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 0 \end{aligned}$$

H_1 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point I.

2) On note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB)

$$\begin{aligned}
M \in H_2 &\Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 36 \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 36 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 18 \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI}\right).\overrightarrow{BA} = 18 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BA} = 18 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} - AI \times BA = 18 \text{ (car } \overrightarrow{AI} \text{ et } \overrightarrow{BA} \text{ colinéaires de sens contraires)} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} - 18 = 18 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 36 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires de même sens et } AH \times AB = 36 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires de même sens et } AH = 6 \\
&\Leftrightarrow H = B
\end{aligned}$$

H_2 est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point B.

Exercice 11 : équations de droites et équations de cercles

Pour tout l'exercice, on se situe dans un repère orthonormé.
1) On considère les points A(2 ; 1), B(0 ; -2) et C(-3 ; 5).
Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
2) Déterminer l'ensemble (E) des points M(x ; y) vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$.
Préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.
3) Même question avec l'ensemble (F) des points m(x ; y) vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$.
4) Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB] avec A(4 ; 5) et B(-2 ; 7).

Solution

1) Soit (h) la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Les droites (BC) et (h) sont donc perpendiculaires. Donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à (h).

Or $\overrightarrow{BC}(-3;7)$ donc une équation de (h) est $-3x + 7y + c = 0$.

De plus, (h) passe par A donc : $-3 \times 2 + 7 \times 1 + c = 0$. Par conséquent, $c = -1$.

Une équation de (h) est donc $-3x + 7y - 1 = 0$

2) La forme canonique de $x^2 - 2x$ est $(x-1)^2 - 1$.

Celle de $y^2 + 8y$ est $(y+4)^2 - 16$.

Donc $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = 23$.

L'ensemble (E) est donc le cercle de centre I(1 ; -4) et de rayon $r = \sqrt{23}$.

3) On procède de même : $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 + 19 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = -2$.

Or, pour tous réels x et y, $(x-1)^2 + (y+4)^2 \geqslant 0$ et $-2 < 0$. Par conséquent, l'équation n'est vérifiée pour aucune valeur de x et y. Donc (F) est l'ensemble vide.

4) Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M(x ; y) tels que $\overrightarrow{MA}.\ \overrightarrow{MB} = 0$ ou encore $\overrightarrow{AM}.\ \overrightarrow{BM} = 0$.

Or $\overrightarrow{AM}(x-4; y-5)$ et $\overrightarrow{BM}(x+2; y-7)$. Donc $\overrightarrow{AM}.$
$\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2) + (y-5)(y-7) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 12y + 27 = 0$.